О. А. Иванов 100 олимпиадных задач для старшеклассников. Задание 10

1. Можно ли расположить под числами $1, 2, \ldots, 17$ те же числа, расположенные в некотором порядке так, чтобы все попарные суммы были нечетны?

2. Решите систему $\begin{cases} x - y = xy + 11, \\ x^2y - y^2x + 30 = 0. \end{cases}$

3. Найдите расстояние от вершины прямого угла прямоугольного треугольника с катетами a и b до центра квадрата, построенного вне треугольника на его гипотенузе.

4. Решите уравнение $\sin(\arcsin x) = \arccos(\cos x)$.

5. Дана окружность и точка A вне ее. Найдите множество середин отрезков AM, где M — точка данной окружности.

6. Шесть команд провели турнир по волейболу (в один круг) и все набрали разное число очков. Как сыграли между собой команды, занявшие 3-е и 4-е места?

7. Тридцать стульев стоят а ряд. Время от времени подходит человек и садится на один из свободных стульев. При этом один из его соседей (если таковые имелись) встает и уходит. Какое наибольшее число стульев может быть занято, если сначала все они были свободны?

8. Могут ли при некотором действительном значении a быть одновременно целыми числа $a + \sqrt{15}$ и $\sqrt{15} - \dfrac{1}{a}$?

9. Точка O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции, стороны AD и BC которой параллельны. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

10. Точки K и L — середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, P — точка пересечения отрезков AK и BL, Q — отрезков CL и DK. Докажите, что сумма площадей треугольников ABP и CDQ равна площади четырехугольника $PKQL$.