О. А. Иванов 100 олимпиадных задач для старшеклассников. Задание 5

1. В трех урнах лежат: два белых; два черных; белый и черный шары. На каждой из них табличка не соответствует ее содержимому. Какое наименьшее число шаров (и из какой урны) надо вынуть, чтобы после этого быть в состоянии развесить таблички правильно.

2. Одиннадцать шестеренок расположены по кругу так, что первая из них сцеплена со второй, вторая — с третьей, а одиннадцатая — с первой. Может ли такая система вращаться? А если шестеренок двенадцать?

3. На прямой дан набор отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам.

4. Функция *f* задана на всей прямой и такова, что $2f(x)+f(1-x)=3x^2$. Найдите $f(5)$.

5. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

6. Проверьте, что $1110\cdot1111\cdot1112\cdot1113+1=(1235431)^2$.

7. Котенок сидит на середине лестницы, прислоненной к стене. По какой траектории будет двигаться котенок, если лестница заскользит по полу?

8. Найдите множество точек, являющихся вершинами прямого угла треугольника, две другие вершины которого лежат на сторонах другого прямого угла.

9. Докажите, что десятичная запись некоторой степени числа 27 заканчивается четырьмя нулями и единицей.

10. Известно, что $a>b>c>d>e$. Докажите, что $a^2-b^2+c^2-d^2+e^2>(a-b+c-d+e)^2$.