

О. А. Иванов 100 олимпиадных задач для старшеклассников. Задание 4

1. Докажите, что любое натуральное число, большее 5, можно представить как сумму простого числа и составного.
2. Известно, что число $\sqrt{2}$ является корнем многочлена $x^3 - (a+2)x^2 + bx - 2a$, где a и b — целые числа. Найдите a , b и остальные корни этого многочлена.
3. Точка касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности делит его гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найдите катеты этого треугольника.
4. Найдите все такие простые числа p , для которых число $8p^2 + 1$ — тоже простое.
5. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Островитянин в присутствии другого островитянина сказал, что по крайней мере один из них лжец. Кто они?
6. Докажите неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. При каком наибольшем k верно неравенство
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq k(xy + yz + zt + tx + xz + ty)?$$
7. Найдите число областей, на которые разбивают: а) прямую n различных точек; б) плоскость n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке?
8. Какова наименьшая площадь круга, которым можно накрыть треугольник со сторонами 14, 10 и 9 см?
9. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, целиком покрывают этот четырехугольник.
10. Докажите, что для всякого натурального числа n сумма кубов чисел от 1 до n является точным квадратом.

