О. А. Иванов 100 олимпиадных задач для старшеклассников. Задание 4

1. Докажите, что любое натуральное число, большее 5, можно представить как сумму простого числа и составного.

2. Известно, что число $\sqrt{2}$ является корнем многочлена $x^3-(a+2)x^2+bx-2a$, где a и b — целые числа. Найдите a, b и остальные корни этого многочлена.

3. Точка касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности делит его гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найдите катеты этого треугольника.

4. Найдите все такие простые числа p, для которых число $8p^2+1$ — тоже простое.

5. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Островитянин в присутствии другого островитянина сказал, что по крайней мере один из них лжец. Кто они?

6. Докажите неравенство $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$. При каком наибольшем k верно неравенство

$$x^2+y^2+z^2+t^2 \geqslant k(xy+yz+zt+tx+xz+ty)?$$

7. Найдите число областей, на которые разбивают: а) прямую n различных точек; б) плоскость n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке?

8. Какова наименьшая площадь круга, которым можно накрыть треугольник со сторонами 14, 10 и 9 см?

9. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, целиком покрывают этот четырехугольник.

10. Докажите, что для всякого натурального числа n сумма кубов чисел от 1 до n является точным квадратом.