Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 2000

1. а) Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 3, 7 и 10?

б) Решите уравнение $[2\sin 3x]=-2\sin 2x$ (здесь $[\,.\,]$ — это целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, его не превосходящее).

в) Найдите количество лежащих на кривой $x^2-y^2=1944$ точек плоскости, координаты которых суть целые числа.

г) Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью $\frac{1}{2}$, а проигрывает с вероятностью $\frac{1}{8}$ (тем самым с вероятностью $\frac{3}{8}$ в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 80 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя кидают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с хода которого начнется этот матч.

2. а) Решите неравенство $\frac{4}{(x-1)^2}\geqslant\frac{5}{x^2}-4$.

б) Решите уравнение $\sqrt{a-2\cos 2x}=a\sin x$.

в) На сторонах угла величиной 120° с вершиной в точке A на расстоянии 4 друг от друга лежат точки K и L. Пусть M — точка пересечения восстановленных в точках K и L перпендикуляров к соответствующим сторонам угла. Найдите расстояние от M до A.

г) Сколько сторон имеет сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через точки $K\in[AB]$, $L\in[A'B']$ и $M\in[C'D']$, которые делят эти отрезки в, соответственно, отношениях $1:4$, $11:4$ и $8:7$ (считая от вершины, указанной первой)?

3. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член x_0 которой — натуральное число, задана соотношениями

$$x_{n+1}=\begin{cases}\frac{x_n}{2}, & \text{если число } x_n \text{ четно;}\\ x_n+7, & \text{если оно нечетно.}\end{cases}$$

а) Найдите все периодические последовательности данного вида.

б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический «хвост», т. е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t}=x_n$ для всякого $n\geqslant N$.