Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 2000, В1 отф. Даша

1. а) Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 2, 3 и 5?

б) Решите уравнение $[2\cos 3x] = 2\sin 2x$ (здесь $[.]$ — это целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, его не превосходящее).

в) Найдите количество лежащих на кривой $x^2 - y^2 = 2000$ точек плоскости, координаты которых суть целые числа.

г) Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью $\frac{1}{2}$, а проигрывает с вероятностью $\frac{1}{4}$ (тем самым с вероятностью $\frac{1}{4}$ в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 40 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя кидают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с хода которого начнется этот матч.

2. а) Решите неравенство $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} \geqslant 5.$

б) Решите уравнение $\sqrt{a + 2\cos 2x} = a\cos x.$

в) Внутри угла величиной 60° с вершиной в точке A на расстоянии 4 от нее расположена точка M. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны этого угла.

г) Сколько сторон имеет сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через точки $K \in [A'D'],\ L \in [B'C']$ и $M \in [BB']$, которые делят эти отрезки в, соответственно, отношениях $16:9,\ 2:3$ и $1:2$ (считая от вершины, указанной первой)?

3. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член x_0 которой — натуральное число, задана соотношениями

$$x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n}{2}, & \text{если число } x_n \text{ четно;} \\ x_n + 9, & \text{если оно нечетно.} \end{cases}$$

а) Найдите все периодические последовательности данного вида.

б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический «хвост», т. е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t} = x_n$ для всякого $n \geqslant N$.