Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1999 год, вариант 1

1. а) Решите систему $\begin{cases} \sin x \cos y = 0, \\ \cos x \sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

б) Существует ли многочлен $p(x) = x^9 + a_1 x^8 + \ldots + a_9$, имеющий девять различных действительных корней, все коэффициенты a_i которого по модулю не превосходят 0,001?

в) Докажите неравенство $\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 2 \ln 3 \ln 5 < \ln 2 \ln 3 + \ln 3 \ln 5 + \ln 5 \ln 2 + 1$.

2. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 8x} + \sqrt{x^2 - 24x} \leqslant 8$.

б) Найдите все a, при которых уравнение $\cos(x^2) = \cos(x + a)$ не имеет решений на отрезке $[0;\, 1]$.

в) Найдите наименьшее расстояние между диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребрами 3, 6, 6 см и не пересекающей ее диагональю его квадратной грани.

г) Найдите наибольшую площадь четырехугольника, длины последовательных сторон которого равны 1, 2, 3, 2 см.

3. Дана последовательность $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^{-n}$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$

а) Докажите, что $3x_{n+1} = 7x_n - 2x_{n-1}$ при всех $n \geqslant 1$.

б) Известно, что $x_{1999} > 0$. Верно ли, что $x_{2000} > 0$?

в) Пусть $a = b = 1$. Существует ли арифметическая прогрессия, среди членов которой содержатся все числа $x_0,\ x_1,\ \ldots$?