Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1998 год, вариант 2

1. а) Докажите, что если каждая из средних линий четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника, то этот четырехугольник параллелограмм.

б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а боковое ребро — двум.

в) Докажите, что если $a_i > 0,\ a_i c_i \geqslant b_i^2$ $(i = 1, 2, 3)$, то

$$(a_1+a_2+a_3)(c_1+c_2+c_3) \geqslant (b_1+b_2+b_3)^2.$$

2. а) Нарисуйте график функции $f(x) = \log_3 x - 3x - |\log_3 x + 3x|$.

б) Решите уравнение $\sqrt{2+\cos 2x} = \sin x + \cos x$.

в) Решите неравенство $\sqrt{\left|x-\dfrac{1}{4}\right|} \leqslant \dfrac{1}{2} + ax$.

г) Для того, чтобы обеспечить себя в старости, Джон открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 2,000 $. Достаточно ли ему копить деньги 27 лет, чтобы в дальнейшем тратить по 20,000 $ в год из процентов, не трогая накопленной суммы? Банк дает 10% годовых, а $\lg 1{,}1 = 0{,}0414$.

3. а) Найдите все треугольники, длины сторон и величины углов которых образуют арифметические прогрессии.

б) Верно ли, что для всякой арифметической прогрессии из четырех положительных чисел существует выпуклый четырехугольник, длинами сторон которого являются эти числа?

в) Найдите все четырехугольники, длины сторон и углы которых (взятые в циклических порядках) образуют арифметические прогрессии.

4. а) Найдите все целые k, при которых разрешимо уравнение

$$\sqrt{\arcsin x} + \sqrt{\arccos x} = \sqrt{\tfrac{k}{10}}.$$

б) Найдите все целые решения уравнения $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1998}$.

в) Найдите все натуральные решения уравнения

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{1998}.$$