Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1997 год, вариант 2

1. а) Решите уравнение $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=2.$

б) Числа p, $q\in[-1;\,1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен px^2+qx-1 имеет действительные корни.

в) Докажите, что если a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, то из отрезков длиной $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$ также можно составить треугольник.

г) Дан треугольник ABC. Докажите, что если $\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\dfrac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$, то он либо равнобедренный, либо прямоугольный.

2. а) Решите неравенство $\log_2^2 x+3\log_2 x\log_2(x-2)+2\log_2^2(x-2)\geqslant 0.$

б) Решите уравнение $4\sin x\cos 2x\cos 4x=\sin 7x.$

в) Найдите все b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y+x^2\leqslant b,\\ x+y^2\leqslant b \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. а) Решите уравнение $1+x^2+\ldots+x^{4k-2}=2kx^{2k-1}.$

б) Докажите, что если все ненулевые коэффициенты некоторого многочлена равны ± 1, то все его корни по модулю меньше двух.

в) Известно, что $a<b<c$, $a+b+c=6$ и $ab+bc+ca=9$. Докажите, что $0<a<1<b<3<c<4$.

4. а) Найдите все пары a, b комплексных чисел, таких что $|a|=|b|=1$ и $|a+b|=|a^2+b^2|$.

б) Докажите, что если $|a|=|b|=|c|=1$, то $|a+b+c|=|ab+bc+ca|$.

в) Докажите, что если

$$\begin{cases} \cos x+\cos y+\cos z=0,\\ \sin x+\sin y+\sin z=0, \end{cases}$$

то $\sin 3x=\sin 3y=\sin 3z$.