

Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1997 год, вариант 2

1. а) Решите уравнение $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}} = 2$.

б) Числа $p, q \in [-1; 1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен $px^2 + qx - 1$ имеет действительные корни.

в) Докажите, что если a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, то из отрезков длиной $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{c}$ также можно составить треугольник.

г) Дан треугольник ABC . Докажите, что если $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$, то он либо равнобедренный, либо прямоугольный.

2. а) Решите неравенство $\log_2^2 x + 3 \log_2 x \log_2(x-2) + 2 \log_2^2(x-2) \geq 0$.

б) Решите уравнение $4 \sin x \cos 2x \cos 4x = \sin 7x$.

в) Найдите все b , при которых система неравенств

$$\begin{cases} y + x^2 \leq b, \\ x + y^2 \leq b \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. а) Решите уравнение $1 + x^2 + \dots + x^{4k-2} = 2kx^{2k-1}$.

б) Докажите, что если все ненулевые коэффициенты некоторого многочлена равны ± 1 , то все его корни по модулю меньше двух.

в) Известно, что $a < b < c$, $a + b + c = 6$ и $ab + bc + ca = 9$. Докажите, что $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$.

4. а) Найдите все пары a, b комплексных чисел, таких что $|a| = |b| = 1$ и $|a + b| = |a^2 + b^2|$.

б) Докажите, что если $|a| = |b| = |c| = 1$, то $|a + b + c| = |ab + bc + ca|$.

в) Докажите, что если

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 0, \\ \sin x + \sin y + \sin z = 0, \end{cases}$$

то $\sin 3x = \sin 3y = \sin 3z$.