Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1997 год, вариант 1

1. а) Решите уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$

б) Числа $p,\ q\in[0;1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен x^2+px+q имеет действительные корни.

в) Докажите, что если не существует треугольника с длинами сторон a, b, c, то нет и треугольника со сторонами a^n, b^n, c^n (n — натуральное).

г) Докажите, что треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1.$

2. а) Решите неравенство $\lg^2(x+1)\geqslant\lg(x+1)\lg(x-1)+2\lg^2(x-1).$

б) Решите уравнение $4\cos x\cos 2x\cos 4x=\cos 7x.$

в) Найдите все b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y\geqslant (x-b)^2,\\ x\geqslant (y-b)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. Пусть $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n.$

а) Докажите, что если $p(k)\in\mathbb{Q}$ при всех $k\in\mathbb{Z}$, то $a_i\in\mathbb{Q}$ при всех $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$

б) Докажите, что из того, что $p(k)\in\mathbb{Z}$ при всех $k\in\mathbb{Z}$, не следует, что $a_i\in\mathbb{Z}$ при всех $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$

в) Пусть $q_i(x)=\dfrac{x(x-1)\ldots(x-i+1)}{i!}$, $q_0(x)=1.$ Докажите, что если $p(k)\in\mathbb{Z}$ при всех $k\in\mathbb{Z}$, то $p(x)=\sum b_iq_i(x)$, где $b_i\in\mathbb{Z}$ при всех $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$

4. а) Какое из чисел больше, 2^{300} или 3^{200}?

б) Представьте число 1997 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых с максимально возможным произведением.

в) Докажите, что произведение нескольких положительных чисел, сумма которых равна 1997, не превосходит e^{800}.