

Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1997 год, вариант 1

1. а) Решите уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

б) Числа $p, q \in [0; 1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен $x^2 + px + q$ имеет действительные корни.

в) Докажите, что если не существует треугольника с длинами сторон a, b, c , то нет и треугольника со сторонами a^n, b^n, c^n (n — натуральное).

г) Докажите, что треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$.

2. а) Решите неравенство $\lg^2(x+1) \geq \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$.

б) Решите уравнение $4\cos x \cos 2x \cos 4x = \cos 7x$.

в) Найдите все b , при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \geq (x-b)^2, \\ x \geq (y-b)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. Пусть $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

а) Докажите, что если $p(k) \in \mathbb{Q}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $a_i \in \mathbb{Q}$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.

б) Докажите, что из того, что $p(k) \in \mathbb{Z}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, не следует, что $a_i \in \mathbb{Z}$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.

в) Пусть $q_i(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!}$, $q_0(x) = 1$. Докажите, что если $p(k) \in \mathbb{Z}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $p(x) = \sum b_i q_i(x)$, где $b_i \in \mathbb{Z}$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.

4. а) Какое из чисел больше, 2^{300} или 3^{200} ?

б) Представьте число 1997 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых с максимально возможным произведением.

в) Докажите, что произведение нескольких положительных чисел, сумма которых равна 1997, не превосходит e^{800} .