Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1996 год, вариант 2

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение

$$ax^{13}+x-1=0\,?$$

б) Пусть $p=b_1b_2\ldots b_n$ ($b_i>0$). Докажите неравенство

$$b_1+b_2+\ldots+b_n \geqslant n+\ln p.$$

в) Пусть A, B, C — величины углов некоторого треугольника. Докажите, что если

$$\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)=0,$$

то этот треугольник — равнобедренный.

г) Пусть $g(x)=\int\limits_0^x \cos^n t\,dt$. Найдите все $n\in\mathbb{N}$, при которых функция g периодична.

2. а) Решите неравенство $|\log_3 x|+\log_{3x}3\leqslant \dfrac{5}{2}$.

б) Найдите все числа $k\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ 6\}$, для которых верно неравенство $\sin^2 k+\cos^2 2k+\sin^2 3k\geqslant 1$.

в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a,b)$, таких что уравнение $\sqrt{x^2+1}=ax+b$ ($b<0$) имеет решение.

3. Про последовательность $\{c_n\}$ известно, что $c_1=c>0$ и $c_{n+1}=\dfrac{2(\sqrt{c_n^2+4}-2)}{c_n}$.

а) Докажите, что последовательность $\{c_n\}$ монотонна и вычислите ее предел.
б) Докажите, что если $c=2$, то $\lim 2^n c_n=\pi$.
в) Сколько рациональных чисел может содержать такая последовательность?

4. Пусть $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_4$ — вершины правильного пятиугольника, вписанного в единичную окружность с центром O.
а) Докажите, что $\overline{OA_0}+\overline{OA_1}+\ldots+\overline{OA_4}=0$.
б) Докажите, что $(A_0A_1\cdot A_0A_2)^2=5$.
в) Докажите, что многочлен $x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1$ делится на многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$.