

Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1996 год, вариант 2

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение

$$ax^{13} + x - 1 = 0?$$

- б) Пусть $p = b_1 b_2 \dots b_n$ ($b_i > 0$). Докажите неравенство

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq n + \ln p.$$

- в) Пусть A, B, C — величины углов некоторого треугольника. Докажите, что если

$$\sin(A - B) + \sin(B - C) + \sin(C - A) = 0,$$

то этот треугольник — равнобедренный.

- г) Пусть $g(x) = \int_0^x \cos^n t \, dt$. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых функция g периодична.

2. а) Решите неравенство $|\log_3 x| + \log_{3x} 3 \leq \frac{5}{2}$.

- б) Найдите все числа $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$, для которых верно неравенство $\sin^2 k + \cos^2 2k + \sin^2 3k \geq 1$.

- в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a, b)$, таких что уравнение $\sqrt{x^2 + 1} = ax + b$ ($b < 0$) имеет решение.

3. Про последовательность $\{c_n\}$ известно, что $c_1 = c > 0$ и $c_{n+1} = \frac{2(\sqrt{c_n^2 + 4} - 2)}{c_n}$.

- а) Докажите, что последовательность $\{c_n\}$ монотонна и вычислите ее предел.

- б) Докажите, что если $c = 2$, то $\lim 2^n c_n = \pi$.

- в) Сколько рациональных чисел может содержать такая последовательность?

4. Пусть $A_0, A_1, \dots, A_4$ — вершины правильного пятиугольника, вписанного в единичную окружность с центром O .

- а) Докажите, что $\overline{OA_0} + \overline{OA_1} + \dots + \overline{OA_4} = 0$.

- б) Докажите, что $(A_0 A_1 \cdot A_0 A_2)^2 = 5$.

- в) Докажите, что многочлен $x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ делится на многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.