Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1996 год, вариант 1

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение $x^{11}-ax+1=0$?

б) Пусть $s=a_1+a_2+\ldots+a_n$ ($a_i\geqslant-1$). Докажите неравенство

$$(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)\leqslant e^s.$$

в) Пусть A, B, C — величины углов некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что если

$$\operatorname{tg}(A-B)+\operatorname{tg}(B-C)+\operatorname{tg}(C-A)=0,$$

то этот треугольник — равнобедренный.

г) Пусть $f(x)=\int\limits_0^x \sin^{1995}t\,dt$. Решите уравнение $f(x)=0$.

2. а) Решите неравенство $\log_2 x+|\log_{2x}2|\geqslant\frac{3}{2}$.

б) Верно ли, что при всех $k\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ 6\}$ справедливо неравенство $\cos^2 k+\cos^2 2k+\cos^2 3k\geqslant 1$?

в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a,\ b)$, таких что уравнение $\sqrt{x^2-1}=ax+b$ ($b>0$) имеет решение.

3. Про последовательность $\{x_n\}$ известно, что $x_1=1$ и если $x_n=\frac{p}{q}$, то $x_{n+1}=\frac{p+2q}{p+q}$.

а) Докажите, что каждая из дробей, появляющихся при определении членов этой последовательности, несократима.

б) Докажите, что последовательность $a_n=|x_n^2-2|$ монотонна.

в) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

4. Про последовательность $\{q_n\}$ известно, что $q_1=1$, $q_i\in\mathbb{N}$ и $q_{n+1}\leqslant q_1+\ldots+q_n+1$.

а) Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных (возможно, одного) членов этой последовательности.

б) Докажите, что если последовательность q_n такова, что всякое натуральное числа представляется в виде суммы некоторых членов последовательности $\{q_n\}$ единственным образом, то

$$(1+x^{q_1})(1+x^{q_2})\ldots(1+x^{q_n})=1+x+x^2+\ldots+x^N.$$

в) Найдите все последовательности, для которых имеет место тождество из предыдущего пункта.