Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1995 год, вариант 2

1. а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\operatorname{tg}^2 2x+\operatorname{ctg}^2 x=10$.

б) Найдите число решений уравнения $2+ax=\sqrt{5-x}$.

в) Докажите, что уравнение $1+9^{9x}+5^x=4x+3$ имеет ровно два решения.

г) Докажите, что выражение $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$ принимает любое действительное значение тогда и только тогда, когда только одно из чисел a, b лежит между c и d.

2. Последовательности a_n , b_n связаны соотношениями $a_{n+1}=\dfrac{b_n}{2}$, $b_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{2}$.

а) Пусть $a_1=0$, $b_1=1$. Положим

$$\Delta_n=\sqrt{\left(a_n-\frac{1}{3}\right)^2+\left(b_n-\frac{2}{3}\right)^2}.$$

Докажите, что числа Δ_n образуют геометрическую прогрессию.

б) Докажите, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют и не зависят от выбора a_1, b_1.

в) Лучи ℓ_1 и m_1 лежат в первом координатном угле, причем луч ℓ_1 образует угол $\dfrac{\pi}{5}$ с осью абсцисс, а m_1 — угол $\dfrac{\pi}{7}$ с осью ординат. Луч ℓ_n является биссектрисой угла между осью абсцисс и лучом m_{n-1}, а m_n — биссектрисой угла между осью ординат и ℓ_{n-1}. Вычислите с точностью до 0,01 угол между лучом ℓ_{40} и осью абсцисс.

3. а) Известно, что $x+y=2$, $x^3+y^3=5$. Найдите x^5+y^5.

б) Докажите, что если многочлен x^n-1 делится на многочлен x^k-1, то многочлен $x^{4n}-1$ делится на $x^{4k}-1$.

в) Докажите, что многочлен $(x^n-1)(x^{n+1}-1)\ldots(x^{n+k-1}-1)$ делится на многочлен $(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)$.

4. а) У Янатты имеются чашечные весы и набор разновесок в 1, 5, ..., 5^{1995} аппа (по одной каждого веса). Докажите, что ей не удастся разложить их по чашкам весов так, чтобы весы были в равновесии.

б) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin x\sin 5x\ldots\sin 5^{1995}x\,dx$.

в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, что из образовавшихся кусков можно составить треугольник.