

**Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1995 год, вариант 2**

1. а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения  $\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 10$ .

б) Найдите число решений уравнения  $2 + ax = \sqrt{5 - x}$ .

в) Докажите, что уравнение  $1 + 9^{9x} + 5^x = 4x + 3$  имеет ровно два решения.

г) Докажите, что выражение  $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$  принимает любое действительное значение тогда и только тогда, когда только одно из чисел  $a, b$  лежит между  $c$  и  $d$ .

2. Последовательности  $a_n, b_n$  связаны соотношениями  $a_{n+1} = \frac{b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{1+a_n}{2}$ .

а) Пусть  $a_1 = 0, b_1 = 1$ . Положим

$$\Delta_n = \sqrt{\left(a_n - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b_n - \frac{2}{3}\right)^2}.$$

Докажите, что числа  $\Delta_n$  образуют геометрическую прогрессию.

б) Докажите, что пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  существуют и не зависят от выбора  $a_1, b_1$ .

в) Лучи  $\ell_1$  и  $m_1$  лежат в первом координатном угле, причем луч  $\ell_1$  образует угол  $\frac{\pi}{5}$  с осью абсцисс, а  $m_1$  — угол  $\frac{\pi}{7}$  с осью ординат. Луч  $\ell_n$  является биссектрисой угла между осью абсцисс и лучом  $m_{n-1}$ , а  $m_n$  — биссектрисой угла между осью ординат и  $\ell_{n-1}$ . Вычислите с точностью до 0,01 угол между лучом  $\ell_{40}$  и осью абсцисс.

3. а) Известно, что  $x + y = 2, x^3 + y^3 = 5$ . Найдите  $x^5 + y^5$ .

б) Докажите, что если многочлен  $x^n - 1$  делится на многочлен  $x^k - 1$ , то многочлен  $x^{4n} - 1$  делится на  $x^{4k} - 1$ .

в) Докажите, что многочлен  $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1) \dots (x^{n+k-1} - 1)$  делится на многочлен  $(x - 1)(x^2 - 1) \dots (x^k - 1)$ .

4. а) У Янаты имеются чашечные весы и набор разновесов в 1, 5, ...,  $5^{1995}$  аппа (по одной каждого веса). Докажите, что ей не удастся разложить их по чашкам весов так, чтобы весы были в равновесии.

б) Вычислите интеграл  $\int_0^{2\pi} \sin x \sin 5x \dots \sin 5^{1995} x dx$ .

в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, что из образовавшихся кусков можно составить треугольник.