## Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1995 год, вариант 1

**1.** а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\operatorname{tg}^2 2x+\operatorname{tg}^2 x=10$.

б) Найдите число решений уравнения $1+ax=\sqrt{x+3}$.

в) Докажите, что уравнение $8^x+4^x+2^x=2x+3$ имеет ровно два решения.

г) Найдите наибольшее по абсолютной величине значение выражения $(x-8)(x-14)(x-16)(x-22)$ при $x\in[8;22]$.

**2.** Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ связаны соотношениями $a_{n+1}=\dfrac{b_n+c_n}{2}$, $b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}$ и $c_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$.

а) Найдите пределы этих последовательностей, если $a_1=0$, $b_1=1$ и $c_1=2$.

б) Пусть

$$\xi=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}.$$

Докажите, что число $\xi$ является общим пределом данных последовательностей.

в) Дан треугольник $ABC$ с углами $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{4}{7}\pi$; $A_1, B_1, C_1$ — точки пересечения биссектрис его углов с описанной около него окружностью, $A_2$, $B_2$, $C_2$ — точки пересечения биссектрис углов треугольника $A_1B_1C_1$ с этой же окружностью, и т. д. Вычислите углы треугольника $A_{40}B_{40}C_{40}$ с точностью до 0,01.

**3.** а) Докажите, что если число $x+x^{-1}$ целое, то при всех $n\in\mathbb{Z}$ число $x^n+x^{-n}$ также целое.

б) Докажите, что число $[(3+\sqrt{5})^n]+1$ делится на $2^n$ ( $[\ .\ ]$ — целая часть числа).

в) Докажите, что если многочлен $x^n+1$ делится на многочлен $x^k+1$, то многочлен $x^{4n}+1$ делится на $x^{4k}+1$.

**4.** а) У Танъ-Янны имеются чашечные весы и набор разновесок в $1,\ 3,\ \ldots,\ 3^{1995}$ амма (по одной каждого веса). Докажите, что ей не удастся разложить их по чашкам весов так, чтобы весы были в равновесии.

б) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos x\cos 3x\ldots\cos 3^{1995}x\,dx$.

в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, что длина каждого из кусков не превосходит половины ее длины.