

Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1994 год, вариант 2

1. а) Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение

$$|x-1| + |x-2| + \dots + |x-1994| = a?$$

- б) Докажите, что при любом натуральном n число $n^{1994} - 1994n + 1993$ делится на $(n-1)^2$.
в) Докажите неравенство

$$\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} > \frac{1}{4},$$

где в числителе дроби 1994 квадратных корня, в знаменателе — 1993.

2. а) Решите неравенство $x \leq \sqrt[3]{3x-1} - 1$.

- б) Найдите все решения уравнения $\cos 2x + b(\cos x + \sin x) = 0$, лежащие в отрезке $[0; \pi]$.

- в) Решите уравнение $5^{2x} = 3^{2x} + 2 \cdot 5^x + 2 \cdot 3^x$.

3. а) Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y = e^x$, которые проходят через начало координат.

- б) При каких a уравнение $e^x = ax$ имеет решения?

- в) Сколько решений имеет уравнение $10^x = x^{10}$?

- г) Сколько рациональных решений имеет уравнение пункта в)?

4. а) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске квадрат из целого числа ее клеток?

- б) Сколько существует n -позиционных двоичных чисел, в которых нулей не меньше, чем единиц?

- в) Вася и Оля договорились о встрече между 17 и 18 часами. Вася будет ждать Олю в течение 30 минут после своего прихода, а Оля Васю — 10 минут. Какова вероятность их встречи, если каждый из них может подойти к назначенному месту в любой момент времени между 17 и 18 часами?

