

**Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1994 год, вариант 2**

1. а) Сколько решений в зависимости от  $a$  имеет уравнение

$$|x-1| + |x-2| + \dots + |x-1994| = a?$$

- б) Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $n^{1994} - 1994n + 1993$  делится на  $(n-1)^2$ .  
 в) Докажите неравенство

$$\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} > \frac{1}{4},$$

где в числителе дроби 1994 квадратных корня, в знаменателе — 1993.

2. а) Решите неравенство  $x \leq \sqrt[3]{|3x-1|} - 1$ .  
 б) Найдите все решения уравнения  $\cos 2x + b(\cos x + \sin x) = 0$ , лежащие в отрезке  $[0; \pi]$ .  
 в) Решите уравнение  $5^{2x} = 3^{2x} + 2 \cdot 5^x + 2 \cdot 3^x$ .
3. а) Найдите уравнения тех касательных к графику функции  $y = e^x$ , которые проходят через начало координат.  
 б) При каких  $a$  уравнение  $e^x = ax$  имеет решения?  
 в) Сколько решений имеет уравнение  $10^x = x^{10}$ ?  
 г) Сколько рациональных решений имеет уравнение пункта в)?
4. а) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске квадрат из целого числа ее клеток?  
 б) Сколько существует  $n$ -позиционных двоичных чисел, в которых нулей не меньше, чем единиц?  
 в) Вася и Оля договорились о встрече между 17 и 18 часами. Вася будет ждать Олю в течение 30 минут после своего прихода, а Оля Васю — 10 минут. Какова вероятность их встречи, если каждый из них может подойти к назначенному месту в любой момент времени между 17 и 18 часами?