

Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1994 год, вариант 1

1. а) Найдите все такие значения a и b , что система неравенств

$$\begin{cases} x + |y - a| \leq b, \\ y \geq 2|x - b| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- б) Докажите, что кривая

$$x^4 + 1994x^3y - 6x^2y^2 - 1994xy^3 + y^4 = 0$$

делит единичную окружность на восемь равных дуг.

- в) Докажите, что при любом натуральном k уравнение $x^2 - y^2 = k^{1993}$ разрешимо в целых числах.

2. а) Решите неравенство $x + \sqrt[3]{3x+1} - 1 \geq 0$.

- б) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = a(\cos x - \sin x)$, лежащие в отрезке $[0; \pi]$.

- в) Решите уравнение $3^{2x} = 2^{2x} + 3^x + 2^x$.

3. а) Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y = \ln x$, которые проходят через начало координат.

- б) При каких a уравнение $\ln x = ax$ имеет решения?

- в) Сколько решений имеет уравнение $6^x = x^6$?

- г) Сколько рациональных решений имеет уравнение пункта в)?

4. а) Докажите, что число различных способов замощения полосы размером $2 \times n$ «доминошками» равно n -му числу Фибоначчи.

- б) Найдите формулу для суммы квадратов коэффициентов в разложении бинома $(x+1)^n$.

- в) Шестеро учеников готовятся к ответу, сидя в один ряд на скамье за общим столом. Учитель может вызвать их в любом порядке. Какова вероятность того, что, выходя к доске, хотя бы один из них потревожит другого?

