Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1994 год, вариант 1

1. а) Найдите все такие значения a и b, что система неравенств

$$\begin{cases} x+|y-a|\leqslant b, \\ y\geqslant 2|x-b| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

б) Докажите, что кривая

$$x^4+1994x^3y-6x^2y^2-1994xy^3+y^4=0$$

делит единичную окружность на восемь равных дуг.

в) Докажите, что при любом натуральном k уравнение $x^2-y^2=k^{1993}$ разрешимо в целых числах.

2. а) Решите неравенство $x+\sqrt[3]{|3x+1|-1}\geqslant 0.$

б) Найдите все решения уравнения $\cos 2x=a(\cos x-\sin x)$, лежащие в отрезке $[0;\pi]$.

в) Решите уравнение $3^{2x}=2^{2x}+3^x+2^x$.

3. а) Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y=\ln x$, которые проходят через начало координат.

б) При каких a уравнение $\ln x=ax$ имеет решения?

в) Сколько решений имеет уравнение $6^x=x^6$?

г) Сколько рациональных решений имеет уравнение пункта в)?

4. а) Докажите, что число различных способов замощения полоски размером $2\times n$ «доминошками» равно n-му числу Фибоначчи.

б) Найдите формулу для суммы квадратов коэффициентов в разложении бинома $(x+1)^n$.

в) Шестеро учеников готовятся к ответу, сидя в один ряд на скамье за общим столом. Учитель может вызвать их в любом порядке. Какова вероятность того, что, выходя к доске, хотя бы один из них потревожит другого?