Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1993 год, вариант 1

1. а) Постройте эскиз графика функции $y=\left|\log_{2x}\frac{4}{x}\right|$.

б) Изобразите на плоскости множество точек $A(a,\,b)$, координаты которых удовлетворяют равенству

$$\max_{x\in\mathbb{R}} a^{\sin x}=\max_{x\in\mathbb{R}} b^{\cos x}.$$

в) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x=1-ay^2, \\ y=1-ax^2 \end{cases}$$

имеет два решения.

г) Докажите, что $\int\limits_0^1 \frac{x^n\sin x}{1+x^2}\,dx\to 0$ при $n\to+\infty$.

2. а) Решите неравенство $x\cdot 2^{\sqrt{x+2}}+2^x\geqslant 2^{\sqrt{x+2}}+x\cdot 2^x$.

б) Решите неравенство $\sin^2 x+\frac{2}{\sin x}\leqslant \sin x+2$.

в) Найдите все прямые, касающиеся графика функции $y=x^4-2x^3+x^2+19x+93$ в двух различных точках.

3. Пусть $p_k(x)=1+x+\ldots+x^k$, $Q_{k,n}(x)=p_k(x^n)$, $k,n\in\mathbb{N}$.
а) Докажите, что многочлен $p_{2m}(x)$ не имеет действительных корней.
б) Найдите все такие n, при которых многочлен $Q_{2,n}(x)$ делится на $p_2(x)$.
в) При каком условии на k и n $Q_{k,n}(x)$ делится на $p_k(x)$?

4. а) Найдите число различных буквенных сочетаний, которые можно образовать, переставляя буквы в слове «баобаб».

б) Докажите тождество $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k=n\cdot 2^{n-1}$.

в) Двое играют в такую игру: монету бросают два раза и первый из двух игроков выигрывает, если оба раза она упала одной и той же стороной. Известно, что монета фальшивая, так что вероятность появления герба при одном бросании равна $p\neq\frac{1}{2}$. При каких p чаще будет выигрывать первый игрок?