

Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1992 год, вариант 1

1. а) Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, если $a(a+b+c) < 0$. Верно ли обратное утверждение?

б) Решите уравнение $\sin^{19}(\pi x) + \cos^{92}(\pi x) = 1$.

в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар $(a; b)$ действительных чисел, что функция $y = a \sin x - bx$ монотонна на всей числовой прямой.

г) Абсциссы двух точек пересечения некоторой прямой с графиком функции $y = x^3 - 19x + 92$ равны x_1 и x_2 . Найдите абсциссы остальных точек пересечения.

2. Решите неравенства:

а) $\frac{x-2}{2\sqrt{x}-3} \leqslant 1$;

б) $\frac{\log_2 x - \log_x 4}{\log_x(x^2/8)} \leqslant 2$.

в) Докажите, что уравнение $2 \cos 2x = k(4 \cos x - 3)$ имеет решения при любых целых k .

3. а) Упростите произведение $p_n = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n}$.

б) Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

в) Докажите формулу Виета

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots}.$$

4. Положим $I(f) = \int_a^b f(x) dx$.

а) Найдите такие числа A и B , что для всех линейных функций f верно, что $I(f) = (b-a)(Af(a) + Bf(b))$.

б) Существуют ли такие числа A, B, C , что для всех квадратичных функций f верно равенство

$$I(f) = (b-a)(Af(a) + Cf(\frac{a+b}{2}) + Bf(b)) ?$$

в) Найдите формулу, выражающую объем шарового сегмента через его высоту h и радиус R шара.

