Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1992 год, вариант 1

1. а) Докажите, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных действительных корня, если $a(a+b+c)<0$. Верно ли обратное утверждение?

б) Решите уравнение $\sin^{19}(\pi x)+\cos^{92}(\pi x)=1$.

в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар $(a;b)$ действительных чисел, что функция $y=a\sin x-bx$ монотонна на всей числовой прямой.

г) Абсциссы двух точек пересечения некоторой прямой с графиком функции $y=x^3-19x+92$ равны x_1 и x_2. Найдите абсциссы остальных точек пересечения.

2. Решите неравенства:

а) $\dfrac{x-2}{2\sqrt{x}-3}\leqslant 1$;

б) $\dfrac{\log_2 x-\log_x 4}{\log_x(x^2/8)}\leqslant 2$.

в) Докажите, что уравнение $2\cos 2x=k(4\cos x-3)$ имеет решения при любых целых k.

3. а) Упростите произведение $p_n=\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{4}\ldots\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$.

б) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

в) Докажите формулу Виета

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ \ldots}\ .$$

4. Положим $I(f)=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

а) Найдите такие числа A и B, что для всех линейных функций f верно, что $I(f)=(b-a)(Af(a)+Bf(b))$.

б) Существуют ли такие числа A, B, C, что для всех квадратичных функций f верно равенство

$$I(f)=(b-a)(Af(a)+Cf(\tfrac{a+b}{2})+Bf(b))\,?$$

в) Найдите формулу, выражающую обьем шарового сегмента через его высоту h и радиус R шара.