Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1991 год, вариант 2

1. а) Решите уравнение $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cos x=-1$.

б) Найдите множество всех точек плоскости, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на кривой $y=x^3$.

в) Найдите все такие a, при которых функция $y=\lg(x+\sqrt{a^2+x^2})$ нечетная.

г) Найдите все такие b, что при любом a уравнение $ax+b=|x|$ имеет решение.

2. Пусть $f(x)=\sqrt{x+1}-x$.

а) Решите неравенство $f(x)>-1$.

б) Найдите множество значений функции f.

в) Найдите число положительных решений уравнения $|f(x)|=a$.

3. Дан равнобедренный треугольник с углом α при вершине.

а) Докажите, что

$$\frac{r}{R}=\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4},$$

где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

б) При каком α отношение $\frac{r}{R}$ принимает наибольшее значение?

в) Докажите, что в общем случае отношение $\frac{r}{R}$ принимает наибольшее значение для равносторонних треугольников.

4. а) Пусть $a\leqslant b$, $x\leqslant y$. Докажите, что $(a+b)(x+y)\leqslant 2(ax+by)$.

б) Докажите неравенство Чебышева: если

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\dots\leqslant a_n,\ b_1\leqslant b_2\leqslant\dots\leqslant b_n,\text{ то }\sum_1^n a_i\sum_1^n b_i\leqslant n\sum_1^n a_ib_i.$$

в) Пусть функция f монотонно возрастает на $[0;\,1]$. Докажите, что $\int_0^1 f(x)dx\leqslant 2\int_0^1 xf(x)dx$.