

Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1991 год, вариант 1

1. а) Решите уравнение $2^{2\lg x} + 2^3 = 6x^{\lg 2}$.

б) Изобразите на плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $\frac{x+1}{y} \geq 0$.

в) Докажите, что функция $f(x) = \cos(x^2)$ неперiodична.

г) Найдите все такие a , что при любом b уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.

2. Пусть $f(x) = \sin \frac{3x}{2} + \sin x$.

а) Решите уравнение $f(x) = \sin \frac{x}{2}$.

б) Найдите множество значений отношения $\frac{f(x)}{\sin \frac{x}{2}}$.

в) Определите число решений уравнения $f(x) = a \sin \frac{x}{2}$ на отрезке $[0; \pi]$.

3. Отображение f плоскости сопоставляет точке с координатами (u, v) точку $(u + v; 2uv)$.

а) Найдите число элементов в прообразах точек $A(1; 2)$, $B(2; 2)$, $C(3; 2)$.

б) Найдите множество значений отображения f .

в) Докажите, что при всех действительных c образы прямых $u = c$ и $v = c$ совпадают и являются касательными фиксированной параболы.

4. Многочлены Чебышева первого рода определены формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x); \quad x \in [-1; 1], \quad n \geq 0.$$

а) Докажите, что $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

б) Докажите, что $2^{1-n}T_n(x)$ — многочлен степени n с коэффициентом 1 при x^n .

в) Найдите $T_2(x)$ и докажите, что для любого квадратного трехчлена $P(x) = x^2 + ax + b$ выполняется неравенство

$$\max_{[-1;1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2} \max_{[-1;1]} |T_2(x)|.$$

