Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1991 год, вариант 1

1. а) Решите уравнение $2^{2\lg x}+2^3=6x^{\lg 2}$.

б) Изобразите на плоскости множество точек, координаты $(x,\ y)$ которых удовлетворяют неравенству $\dfrac{x+1}{y}\geqslant 0$.

в) Докажите, что функция $f(x)=\cos(x^2)$ непериодична.

г) Найдите все такие a, что при любом b уравнение $ax+b=|x|$ имеет решение.

2. Пусть $f(x)=\sin\dfrac{3x}{2}+\sin x$.

а) Решите уравнение $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$.

б) Найдите множество значений отношения $\dfrac{f(x)}{\sin\frac{x}{2}}$.

в) Определите число решений уравнения $f(x)=a\sin\dfrac{x}{2}$ на отрезке $[0;\pi]$.

3. Отображение f плоскости сопоставляет точке с координатами $(u,\ v)$ точку $(u+v;\,2uv)$.

а) Найдите число элементов в прообразах точек $A(1;2),\ B(2;2),\ C(3;2)$.

б) Найдите множество значений отображения f.

в) Докажите, что при всех действительных c образы прямых $u=c$ и $v=c$ совпадают и являются касательными фиксированной параболы.

4. Многочлены Чебышева первого рода определены формулой

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x);\quad x\in[-1;1],\quad n\geqslant 0.$$

а) Докажите, что $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$.

б) Докажите, что $2^{1-n}T_n(x)$ — многочлен степени n с коэффициентом 1 при x^n.

в) Найдите $T_2(x)$ и докажите, что для любого квадратного трехчлена $P(x)=x^2+ax+b$ выполняется неравенство

$$\max_{[-1;1]}|P(x)|\geqslant\tfrac{1}{2}\max_{[-1;1]}|T_2(x)|.$$