Олимпиада абитуриентов естественно-научных факультетов СПбГУ, 1990 год, вариант 1

1. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству

$$x^2y + xy^2 \leqslant 2xy.$$

б) Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \cos x$.
в) Покажите, не прибегая к помощи микрокалькулятора, что

$$2{,}25 < \log_2 5 < 2{,}5.$$

г) В трапеции $ABCD$ известны длины двух сторон: $AB = 15$ см, $AD = 5$ см. Найдите длины двух других сторон этой трапеции, если одна из диагоналей делит ее на два треугольника равной площади.

2. Дана функция $f(x) = \sqrt{4|x| - x^2}$.
а) Решите уравнение $f(x) = -x - 2$.
б) Решите неравенство $f(x) > x - 5$.
в) Исследуйте, сколько корней, в зависимости от действительного параметра a, имеет уравнение $f(x) = a$.

3. Равнобедренный треугольник с углом φ при вершине вписан в равносторонний треугольник со стороной 2 так, что эта вершина совпадает с серединой стороны равностороннего треугольника.
а) Найдите выражение для площади $S(\varphi)$ этого треугольника.
б) Покажите, что

$$S(\varphi) = \frac{3\sin\varphi}{\left(8\sin^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right)}.$$

в) Докажите, что $S(\varphi) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$.

4. а) Найдите площадь подграфика функции

$$f(x) = \min\{\sqrt{x},\ 2 - x\},\ x \in [0;2].$$

б) Покажите, что $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

в) Докажите, что для любых четырех чисел $a,\ b,\ p,\ q > 0$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, верно неравенство

$$\int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b x^{q-1}dx \geqslant ab.$$

В каком случае имеет место равенство?